

SVEUČILIŠTE U SPLITU
Prirodoslovno-matematički fakultet

Opća fizika 3



Primjeri riješenih seminarskih zadataka

Petar Stipanović

Split, listopad 2015.

Sadržaj:

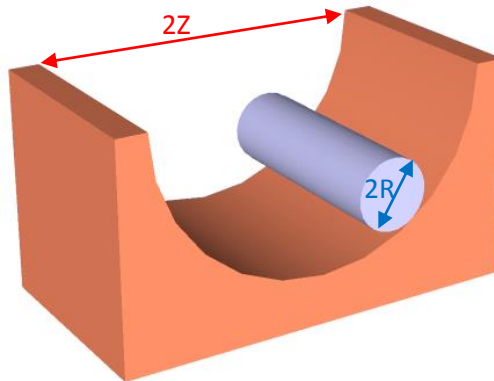
1516 - S1 :: Tijelo koje se kotrlja bez klizanja unutar zakrivljene posude (2)	1
1 Uvod	1
2 Metoda	2
2.1 Određivanje kutne frekvencije preko energije	2
2.2 Određivanje kutne frekvencije preko momenta sile	3
3 Provjera	5
4 Rezultati.....	5
5 Analiza i interpretacija.....	6
1516 - S2 :: Oscilacije u neinercijalnom sustavu (1)	8
6 Uvod	8
7 Metoda	8
8 Provjera	9
9 Rezultati.....	10
10 Analiza i interpretacija.....	10
11 Literatura	10

1516 - S1 :: [Tijelo koje se kotrlja bez klizanja unutar zakrivljene posude \(2\)](#)

1 Uvod

Zadatak: Tijelo radijusa zakrivljenosti R nalazi se u ravnotežnom položaju na dnu zakrivljene posude u obliku polu-cilindra radijusa zakrivljenosti Z . Odredite period idealnog harmonijskog gibanja koje nastaje kotrljanjem tijela nakon što ga za mali pomak izmaknemo iz ravnotežnog položaja. Pretpostavite da se tijelo kotrlja bez klizanja, trenje kotrljanja i otpor zraka zanemarite.

Radi slikovitijeg prikaza, bez smanjenja općenitosti, dok god za moment tromosti pišemo I neizražen preko dimenzija tijela, možemo pretpostaviti da je tijelo, koje se giba u posudi, npr. valjak. Na slici 1 prikazana je skica takvog sustava.



Slika 1: Skica sustava danog u zadatku za slučaj kada je tijelo u posudi valjak

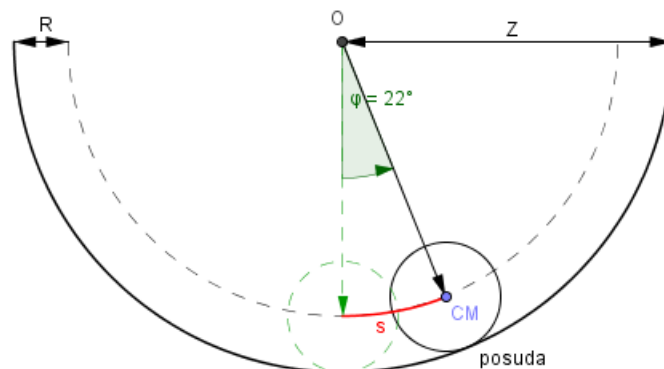
Period titranja

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{1}$$

možemo odrediti procjenjujući kutnu frekvenciju ω nakon što diferencijalnu jednadžbu, koja opisuje gibanje danog sustava, svedemo na oblik

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \tag{2}$$

koji opisuje oscilacije veličine x oko ravnotežnog položaja. U danom sustavu možemo promatrati oscilacije kuta φ jer jednoznačno definiraju položaj tijela koje se giba unutar posude. Kut φ označava otklon vektora položaja centra mase (CM) u odnosu na ravnotežni položaj kao što je prikazano na slici 2.



Slika 2: U posudi radijusa zakrivljenosti Z centar mase (CM) tijela promjera $2R$ giba se po kružnici (isprekidana linija) radijusa $Z - R$. Pri pomicanju tijela iz ravnotežnog položaja (isprekidano zeleno) za kut φ , CM prijeđe luk duljine s .

Jednadžbu gibanja, sličnu izrazu (2), odredit ćemo na 2 načina: koristeći zakon očuvanja energije i promatrajući ukupni moment sila.

2 Metoda

2.1 Određivanje kutne frekvencije preko energije

Prilikom rotacije tijela oko CM-a (slika 2), CM tijela giba se po luku radijusa $Z - R$. Stoga je ukupna **kinetička energija** tijela zbroj translacijskog i rotacijskog doprinosa

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\Omega^2 \quad (3)$$

gdje je Ω kutna brzina rotacije tijela oko osi kroz CM, I moment inercije (tromosti), m masa tijela te v brzina translacije CM-a. CM tijela giba se po kružnici radijusa $(Z - R)$ pa pomak tijela iz ravnotežnog položaja iznosi

$$s = (Z - R)\varphi$$

gdje je φ kut koji zatvara radijvektor CM-a s vertikalom. Prema tome CM se giba brzinom

$$v = \frac{ds}{dt} = (Z - R) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right). \quad (4)$$

Tijelo se kotrlja bez klizanja pa se CM giba brzinom

$$v = R\Omega \Rightarrow \Omega = \frac{v}{R} = \frac{Z - R}{R} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right). \quad (5)$$

Uvrštavanjem (4) i (5) u (3), ukupna kinetička energija postaje

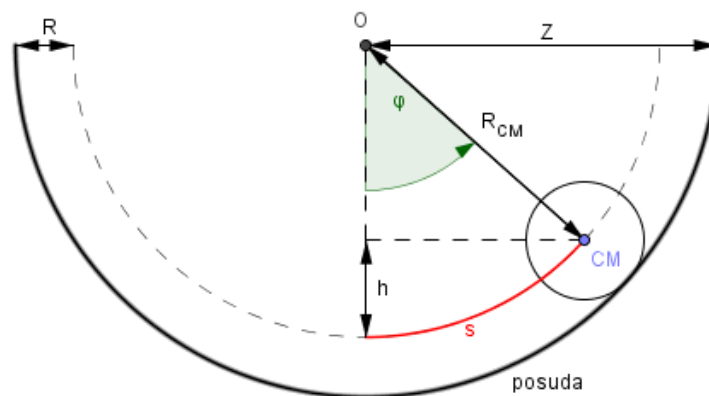
$$E_k = \frac{1}{2}m \left[(Z - R) \frac{d\varphi}{dt} \right]^2 + \frac{1}{2}I \left(\frac{Z - R}{R} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right)^2,$$

odnosno

$$E_k = \frac{1}{2}m \left(1 + \frac{I}{mR^2} \right) (Z - R)^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2. \quad (6)$$

Kada je tijelo izmaknuto za kut φ iz ravnotežnog položaja, njegov centar mase pomaknut je vertikalno u odnosu na ravnotežni položaj za visinu (slika 3)

$$h = (Z - R)(1 - \cos\varphi).$$



Slika 3: Pri pomicanju tijela iz ravnotežnog položaja za kut φ , CM se popne na visinu h koja je jednaka razlici radijusa $R_{CM} = Z - R$ i njegove projekcije na vertikalnu os kroz ravnotežni položaj.

Uzmemo li ravnotežni položaj kao nultu razinu, tada potencijalna energija tijela zbog promjene visine iznosi

$$E_p = mgh = mg(Z - R)(1 - \cos\varphi) \quad (7)$$

Zanimaju nas izrazi za male kutne oscilacije pa ćemo razviti $\cos\varphi$ u red i u prvoj aproksimaciji možemo zanemariti sve članove višeg reda, odnosno zadržati samo prvi (po iznosu najveći) član koji ovisi o φ ,

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2!}.$$

Prema tome ukupna **potencijalna energija** (7) iznosi

$$E_p = \frac{1}{2}mg(Z - R)\varphi^2. \quad (8)$$

Ukupna energija tijela, (6) + (8), iznosi

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)(Z - R)^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}mg(Z - R)\varphi^2 \quad (9)$$

Kako je ukupna energija konstantna (zatvoreni sustav, sile otpora zanemarene), vrijedi

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)(Z - R)^2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{1}{2}mg(Z - R) \cdot 2 \cdot \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) &= 0 \\ \left\{\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)(Z - R) \frac{d^2\varphi}{dt^2} + g\varphi\right\} \cdot \left\{m(Z - R) \frac{d\varphi}{dt}\right\} &= 0 \end{aligned}$$

Kada tijelo izmaknemo iz ravnotežnog položaja ono ne miruje ($\dot{\varphi} \neq 0$) pa je prethodni izraz 0 ako vrijedi

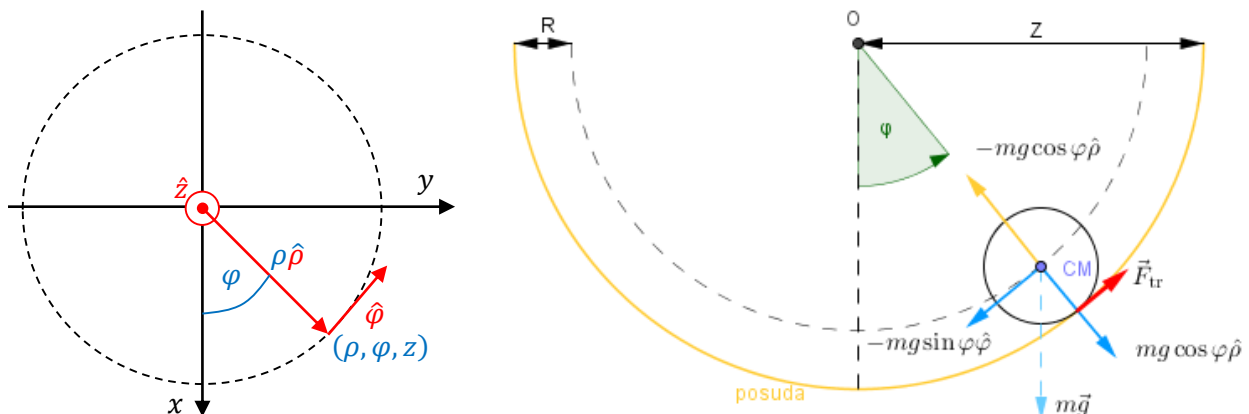
$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)(Z - R) \frac{d^2\varphi}{dt^2} + g\varphi = 0 \quad \Big| : \left(\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)(Z - R)\right) \\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)(Z - R)}\varphi. \end{aligned} \quad (11)$$

U dobivenom izrazu prepoznamo diferencijalnu jednadžbu koja opisuje gibanje idealnog linearnog harmonijskog oscilatora (2) pa zaključujemo kako dano tijelo oscilira kutnom frekvencijom

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)(Z - R)}}. \quad (12)$$

2.2 Određivanje kutne frekvencije preko momenta sile

Promatrano tijelo u zakrivljenoj posudi giba se po kružnim putanjama pa je gibanje lakše promatrati u cilindričnom polarnom sustavu. Stoga odabiremo referentni sustav ka što je prikazano na slici 4.



Slika 4: Lijevo: jedinični vektori u cilindričnom koordinatnom sustavu. Desno: Sile na tijelo dano u zadatku.

Desno na slici 4. prikazane su sile koje djeluju na tijelo. Najjednostavnije je sve sile rastaviti na komponente u smjeru jediničnih vektora cilindričnog koordinatnog sustava. Tada komponenta sile težine $m\vec{g}$ okomita na putanju iznosi $mg \cos \varphi \hat{\rho}$ i jednaka je težini kojom tijelo okomito pritiska zakrivljenu podlogu. Prema 3.

Newtonovom zakonu podloga djeluje na tijelo suprotnom silom istog iznosa pa je ukupna sila na tijelo u $\hat{\rho}$ smjeru uvijek $\vec{0}$. Prema tome preostaje promatrati samo djelovanje komponente od $m\vec{g}$ paralelne (putanji) $-mg \sin \varphi \hat{\varphi}$ i sile trenja \vec{F}_{tr} koja sprječava klizanje tijela. Razvijemo li $\sin \varphi$ u red imamo

$$\sin \varphi = \frac{\varphi^1}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots,$$

a kako se radi o oscilacijama za male kutove φ , razvoj možemo aproksimirati sa

$$\sin \varphi \approx \varphi$$

pa komponentu sile teže paralelnu putanji možemo aproksimirati sa

$$-mg\varphi\hat{\varphi}$$

Tijelo izvodi translaciju pa UKUPNU SILU na tijelo nepromjenjive mase možemo prema 2. Newtonovom zakonu napisati u obliku

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} \quad (13)$$

$$F_{\text{tr}}\hat{\varphi} - mg\varphi\hat{\varphi} = m\vec{a} \quad (14)$$

gdje je linearna akceleracija (centra mase) diska

$$\vec{a} = \vec{\alpha}_\varphi \times \vec{\rho} = \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2} \hat{z} \right) \times ((Z-R)\hat{\rho}) = (Z-R) \frac{d^2\varphi}{dt^2} \hat{\varphi} \equiv \alpha_\varphi \hat{\varphi}. \quad (15)$$

Iz prethodne 2 relacije slijedi

$$F_{\text{tr}}\hat{\varphi} - mg\varphi\hat{\varphi} = m\alpha_\varphi \hat{\varphi} \Rightarrow F_{\text{tr}} - mg\varphi = ma. \quad (16)$$

Osim translacijskog gibanja CM-a, tijelo se također i rotira oko CM-a. Stog je UKUPNI MOMENT SILE različit od $\vec{0}$. Vrijedi analogon od (13),

$$\sum_i \vec{M}_i = \sum_i \vec{\rho}_i \times \vec{F}_i = I \vec{\alpha}_D$$

$$(R\hat{\rho}) \times (F_{\text{tr}}\hat{\varphi}) + mg\varphi(-\hat{\varphi}) \times \vec{0} = I \alpha_D \hat{z}$$

$$RF_{\text{tr}}\hat{z} = I\alpha_D\hat{z} \Rightarrow F_{\text{tr}} = \frac{I\alpha_D}{R} \quad (17)$$

gdje je α_D kutna akceleracija diska oko njegovog centra mase, dok prethodno korištena oznaka α_φ označava kutnu akceleraciju oko centra zakrivljenosti posude. Njihovu ćemo vezu dobiti ako pomoću jedne i druge izrazimo put koji prelazi CM

$$(Z-R)\varphi = R(-\varphi_D) \Rightarrow (Z-R) \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -R \frac{d^2\varphi_D}{dt^2} \Rightarrow (Z-R)\alpha_\varphi = -R\alpha_D.$$

Negativan je kut ($-\varphi_D$) posljedica vrtnje. Dok φ ide u smjeru kazaljke na satu, φ_D ide suprotno. Slijedi

$$\alpha_D = -\frac{Z-R}{R} \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (18)$$

Izražavanjem sile trenja iz (17) i uvrštavanjem u (16) dobivamo

$$\frac{I\alpha_D}{R} - mg\varphi = ma.$$

Nadalje, korištenjem veza (15) i (18), dobivamo

$$-\frac{I}{R} \cdot \frac{Z-R}{R} \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} - mg\varphi = m(Z-R) \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)(Z - R) \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -g\varphi$$

što je ekvivalentno izrazu (11) koji je dobiven drugom metodom, odnosno primjenom $dE/dt = 0$. Dakle, kutna frekvencija iznosi

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)(Z - R)}}. \tag{19}$$

3 Provjera

Jednakosti kutnih frekvencija (12) i (19) dobivenih različitim metodama idu u prilog točnosti rješenja. Kutnu frekvenciju, mogli smo alternativno izvući i ne koristeći $dE/dt = 0$ već koristeći općeniti izraz za energiju linearnog harmonijskog oscilatora

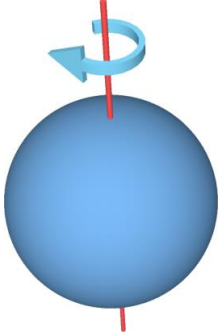
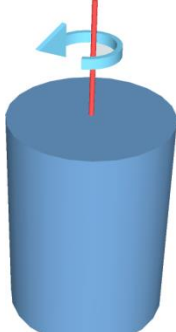
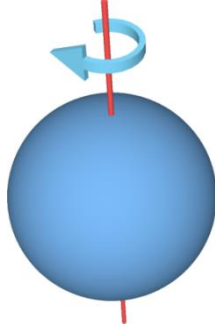
$$E = A \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + Bx^2$$

iz koje računamo kutnu frekvenciju kao $\omega = \sqrt{B/A}$ što bi ponovno rezultiralo istim izrazom. Nadalje, možemo promotriti ponašanje dobivenog izraza kada tijelo aproksimiramo materijalnom točkom, kada nema rotacije i kada zanemarimo trenje klizanja $F_{tr} \rightarrow 0$ pa $I \rightarrow 0$, dok $Z - R \rightarrow Z \equiv l$. Takav je sustav ekvivalentan modelu matematičkog njihala jer djeluju ekvivalentne ukupne sile. U skladu s očekivanim, uvrštavanjem spomenutih limesa u (19) dobivamo izraz za kutnu frekvenciju matematičkog njihala

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{20}$$

4 Rezultati

Kako bismo ispitali utjecaj oblika tijela na period oscilacija, promotrit ćemo oscilacije kuta φ prilikom kotrljanja sfere, valjka i kugle u valjkastoj posudi radijusa zakrivljenosti Z . Momenti tromosti tih tijela dani su u tablici 1.

 <p>Sfera radijusa R i mase m, koja rotira oko središnje osi ima moment tromosti $I = \frac{2}{3}mR^2$.</p>	 <p>Valjak radijusa R i mase m, koji rotira oko uzdužne središnje osi ima moment tromosti $I = \frac{1}{2}mR^2$.</p>	 <p>Kugla radijusa R i mase m, koja rotira oko središnje osi ima moment tromosti $I = \frac{2}{5}mR^2$.</p>
---	--	---

Tablica 1: Momenti tromosti redom sfere, valjka i kugle prilikom rotacije oko osi koja prolazi centrom mase

Uvrštavanjem momenta tromosti iz tablice 1 u (19) dobivamo redom za sferu, valjak i kuglu

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\left(1 + \frac{2mR^2}{3mR^2}\right)(Z - R)}} = \sqrt{\frac{g}{\frac{5}{3}(Z - R)}} \Rightarrow T_S = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{5(Z - R)}{3g}}, \tag{21}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\left(1 + \frac{mR^2}{2mR^2}\right)(Z - R)}} = \sqrt{\frac{g}{\frac{3}{2}(Z - R)}} \Rightarrow T_V = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{3(Z - R)}{2g}}, \tag{22}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\left(1 + \frac{2mR^2}{5mR^2}\right)(Z-R)}} = \sqrt{\frac{g}{\frac{7}{5}(Z-R)}} \Rightarrow T_K = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{7(Z-R)}{5g}}. \quad (23)$$

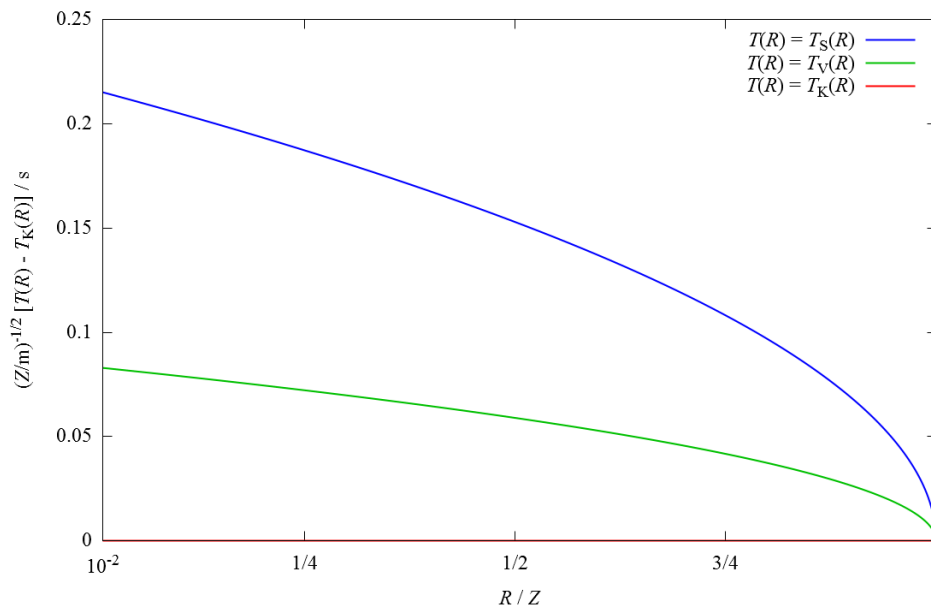
Posebno za izbor $Z = 7R$ periodi titranja sfere, valjka i kugle iznose redom

$$2\pi \sqrt{\frac{10R}{g}}, \quad 2\pi \sqrt{\frac{9R}{g}} \quad \text{i} \quad 2\pi \sqrt{\frac{42R}{5g}}. \quad (24)$$

Z i R jedine su promjenjive veličine u dobivenim izrazima (21), (22) i (23). Ako izrazimo R preko Z i uzmemo $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$, možemo promotriti kako periodi ovise o R/Z , npr. za sferu

$$\frac{T_S}{\sqrt{Z/m}} = 2\pi \sqrt{\frac{5(1-R/Z)}{3 \cdot 9.81}} \text{ s}$$

Ima smisla promatrati vrijednosti R do maksimalne vrijednosti Z kada širina tijela odgovara širini posude. Za $R > Z$ relacija (19) nije ni definirana (negativni broj pod korijenom), ali tada tijelo ne bi moglo ni stati u posudu pa je dobiveni izraz dobro definiran za fizikalno smislene vrijednosti dimenzija tijela i posude. Međutim, iako je izraz definiran za $R = 0$ relacije su izvedene uz pretpostavku danu u zadatku da se tijelo kotrlja pa bi kutna brzina tijela radijusa $R = 0$ težila u beskonačno. Nadalje zanemareno je trenje kotrljanja koje bi moglo postati značajno pri nekim minijaturnim dimenzijama. Stoga ćemo prikazati na slici 5 kako periodi sfere, valjka i kugle ovise o R za $0.01Z \leq R \leq Z$. Zbog vrlo bliskih vrijednosti razlike su uočljivije ako prikažemo periode u odnosu na najmanji, odnosno T_K .



Slika 5: Razlike perioda oscilacija sfere $T_S(R)$ i valjka $T_V(R)$ u odnosu na period kugle $T_K(R)$ pri kotrljanju tih tijela unutar zakrivljene posude prikazane na slici 1

5 Analiza i interpretacija

Ako se tijelo sa slike 1 nalazi u stanju mirovanja na dnu posude (u ravnotežnom položaju), prema 1. Newtonovom zakonu ne bi se pokrenulo. Ako ga izmaknemo iz ravnotežnog položaja za neki kut φ_m i pustimo, ukupna bi sila uvijek djelovala na tijelo tako da se ono kotrlja ubrzavajući prema ravnotežnom položaju, odnosno usporavajući pri gibanju od ravnotežnog položaja. Dakle, tijelo bi se ubrzavalo od $\varphi = \varphi_m$ do $\varphi = 0$ zatim usporavalo do i promijenilo smjer u $\varphi = -\varphi_m$ pa bi se ubrzavalo do $\varphi = 0$ i ponovno usporavalo sve do $\varphi = \varphi_m$ jer smo zanemarili sile otpora poput trenja kotrljanja. Dakle, izvodilo bi kutne oscilacije kao što to predviđa dobivena diferencijalna jednadžba (11) čije je rješenje, uz početni uvjet $\varphi(0) = \varphi_m$ i $\dot{\varphi}(0) = 0$,

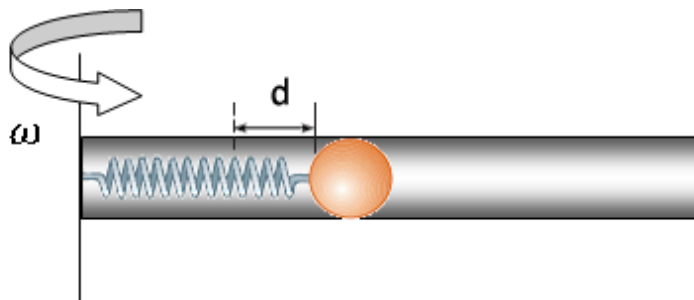
$$\varphi(t) = \varphi_m \cos(\omega t) .$$

Momenti inercije sfere, valjka i kugle iste mase i radijusa odnose se redom kao 20: 15: 12. Dakle, najveći je I od sfere jer njena masa koncentrirana na najvećoj udaljenosti od osi rotacije koja u promatranim slučajevima prolazi centrom mase. Omjeri perioda oscilacija spomenutih tijela (21), (22) i (23) odnose se kao $\sqrt{50} : \sqrt{45} : \sqrt{42}$, dakle u istom poretku kao momenti tromosti od većeg prema manjem. Možemo također uočiti kako izrazi (21), (22) i (23) ne ovise o ukupnoj masi već o korijenu razlike radijusa zakrivljenosti $Z - R$ pomnožene s faktorom, označimo ga $\gamma = 1 + \chi$ gdje je χ omjer momenta tromosti danog tijela i momenta tromosti mR^2 točkaste mase m koja rotira na udaljenosti R . Ako promatramo kotrljanje sfere, valjka i kugle iste mase m i radijusa zakrivljenosti R , najduži će period imati tijelo najvećeg momenta tromosti - sfera, nešto kraći valjak, a najkraći kugla. Takvo ponašanje vidljivo je i iz prikaza razlika perioda na slici 5. Također možemo primijetiti kako su te razlike sve manje i manje što je R bliže Z . Za $R \rightarrow Z$ period $T \rightarrow 0$, oscilacije prestaju jer se tijelo ne može više kotrljati.

1516 - S2 :: [Oscilacije u neinercijalnom sustavu \(1\)](#)

6 Uvod

Zadatak: U sustavu, prikazanome na slici dolje, kuglica mase m giba se bez trenja unutar šupljeg valjka, koji rotira stalnom kutnom brzinom ω oko jedne baze tako da je opruga s kuglicom uvijek u horizontalnoj ravnini. Kuglica je pričvršćena za os rotacije oprugom čija je konstanta elastičnosti k . Ako kuglicu izmaknemo iz položaja ravnoteže za d , koliki će biti period osciliranja ovog sustava? Grafički prikažite kako period ovisi o k/m i ω .



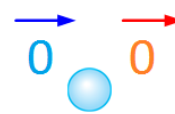
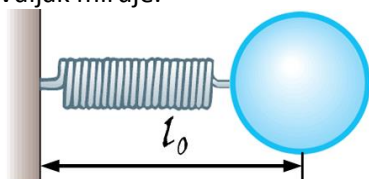
Slika 6: Skica sustava danog u zadatku

Period titranja (1) možemo odrediti analogno kao u prethodnom zadatku procjenjujući kutnu frekvenciju ω nakon što diferencijalnu jednadžbu, koja opisuje gibanje danog sustava, svedemo na oblik (2) koji opisuje oscilacije veličine x oko ravnotežnog položaja. U danom sustavu možemo promatrati oscilacije udaljenosti kuglice od ravnotežnog položaja koji se uspostavi nakon što se sustav zarotira. Jednadžbu gibanja, sličnu izrazu (2), odredit ćemo na promatrajući ukupne sile koje djeluju na sustav, a čitatelju za vježbu ostavljamo pronalaženje iste jednadžbe preko zakona očuvanja energije.

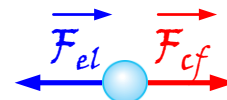
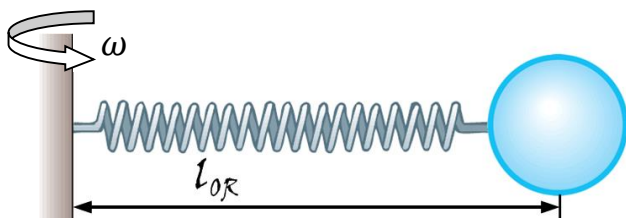
7 Metoda

Promatramo kuglicu koja se giba bez trenja giba unutar šupljeg valjka koji rotira. Odaberimo referentni sustav koji rotira zajedno s valjkom (ishodište u centru vrtanje). U vertikalnom smjeru poništavaju se sila teže i reakcija podloge pa je ukupna sila nula u vertikalnom smjeru. Na slici 7. prikazane su sile na kuglicu u horizontalnom smjeru za različite slučajeve.

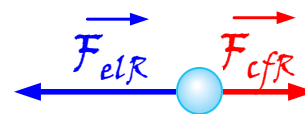
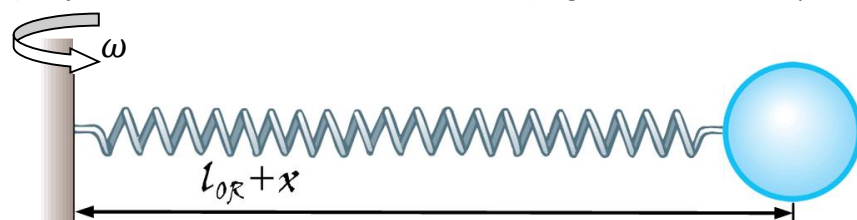
a) Valjak miruje.



b) Valjak rotira oko baze kutnom brzinom ω (kuglica se ne giba u odnosu na valjak).



c) Valjak rotira oko baze kutnom brzinom ω (kuglicu izmaknemo iz položaja ravnoteže za d).



Slika 7: Desno su prikazane sile koje djeluju na kuglicu u različitim sustavima prikazanim lijevo. Šuplji valjak sa slike 1 nije prikazan.

Na slici 7 a) kuglica se nalazi u ravnotežnom položaju udaljena od osi rotacije za ravnotežnu duljinu opruge l_0 . Ne djeluje nikakva sila pa ukupna sila na kuglicu iznosi 0.

Na slici 7 b) kuglica se nalazi u valjku koji rotira pa i ona rotira kutnom brzinom ω . Sada promatramo kuglicu iz neinercijalnog sustava pa na kuglicu djeluje inercijalna sila, odnosno centrifugalna sila koja gura česticu dalje od centra rotacije. Dodatno zbog produljenja opruge djeluje i elastična sila koja vuče česticu prema ravnotežnom položaju koji je udaljen za l_0 od osi rotacije. Kada se uspostavi dinamička ravnoteža između elastične sile opruge \vec{F}_{el} i centrifugalne sile \vec{F}_{cf} , kuglica će mirovati u odnosu na valjak u položaju l_{0R} (novi ravnotežni položaj). Znači, vrijedi

$$\vec{F}_{el} = -\vec{F}_{cf}$$

$$k(l_{0R} - l_0) = m\omega^2 l_{0R}. \quad (25)$$

Izmicanjem kuglice za d (slika 7 c) povećamo elastičnu silu pa ona vuče kuglicu prema položaju l_{0R} pri čemu kuglica ubrzava te zbog inercije nastavlja gibanje prema centru vrtnje, usporava i zaustavlja se na udaljenosti d od položaja ravnoteže l_{0R} , a zatim nastavlja ubrzavati prema ravnotežnom položaju itd. Tako nastaje titranje kuglice oko položaja l_{0R} amplitude d . Na kuglicu djeluje ukupna sila \vec{F}_{uk} .

$$\vec{F}_{uk} = \vec{F}_{elR} + \vec{F}_{cfR}$$

$$m\vec{a} = -k(l_{0R} + x - l_0)\hat{i} + m\omega^2(l_{0R} + x)\hat{i}$$

$$ma = -k(l_{0R} + x - l_0) + m\omega^2(l_{0R} + x)$$

$$ma = -k(l_{0R} - l_0) - kx + m\omega^2 l_{0R} + m\omega^2 x$$

Prema (25) prethodna jednadžba postaje:

$$ma = -m\omega^2 l_{0R} - kx + m\omega^2 l_{0R} + m\omega^2 x$$

$$ma = -(k - m\omega^2)x$$

$$ma = -(k - m\omega^2)x \quad | : m$$

$$\frac{d^2(l_{0R} + x)}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)x \quad (26)$$

Usporedbom (2) i (26) zaključujemo da je kutna frekvencija nastalih oscilacija

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2} \quad ; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (27)$$

pa je period

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}} \quad (28)$$

8 Provjera

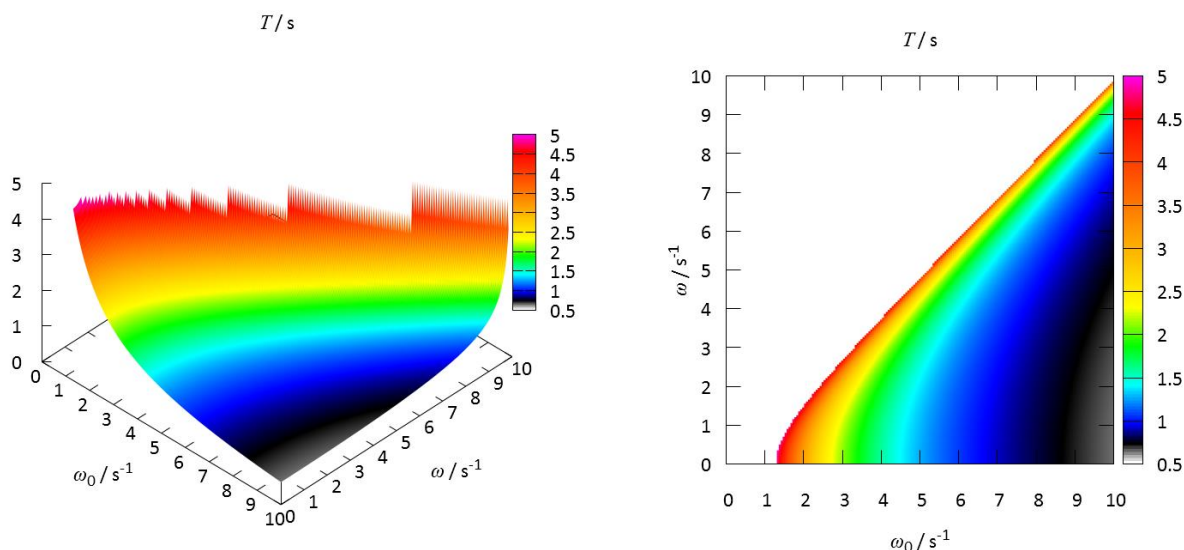
Dobiveni izraz za kutnu frekvenciju (27) možemo provjeriti ako promotrimo njeno asimptotsko ponašanje kada valjak, u kojem se nalazi tijelo na opruzi, prestaje rotirati, odnosno kada $\omega \rightarrow 0$. Tada dobivamo

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \Omega = \omega_0$$

što odgovara kutnoj frekvenciji tijela mase m obješenog o oprugu konstante elastičnosti k u inercijalnom sustavu.

9 Rezultati

Promotrit ćemo u inercijalnom sustavu kako period (28) ovisi o kutnoj frekvenciji tijela mase m privezanog za oprugu konstante elastičnosti k , $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, i kutnoj brzini rotacije valjka, ω . Ovisnost je prikazana gradijentom boja na slici 8.



Slika 8: Period prikazan u ovisnost o kutnoj frekvencija harmonijskog oscilatora $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ i kutnoj brzini rotacije sustava ω .

10 Analiza i interpretacija

U neinercijalnim sustavima, ako inercijalne sile djeluju u smjeru djelovanja opruge, dolazi do promjene ravnotežnog položaja tijela privezanog za oprugu pa je prvo potrebno pronaći novi ravnotežni položaj. Dodatnim izmicanjem za d iz novog ravnotežnog položaja i puštanjem tijela dolazi do titranja kao što to predviđa dobivena diferencijalna jednadžba (26) čije je rješenje

$$x(t) = d \cos(\Omega t) .$$

Međutim, ako se s položajem tijela mijenja također i iznos inercijalne sile na tijelo, tada dolazi i do promjene kružne frekvencije Ω u odnosu na onu u inercijalnom sustavu ω_0 .

Što je ω_0 manji, to je period oscilacija duži i to sve duži i duži što je ω veći. Dakle, što se valjak brže vrti, to je duži period oscilacija. Povećanjem kutne brzine, period sve brže i brže raste (sužavaju se područja istih boja kako idemo duž osi ω) te divergira ($T \rightarrow \infty$) kada $\omega \rightarrow \omega_0$.

Što je veća masa tijela m , to je manji ω_0 , odnosno duži period. Obrnuto utječe konstanta elastičnosti opruge k , što je veća to je veći ω_0 , odnosno kraći period.

11 Literatura

Dodatne problemske zadatke za vježbu možete pronaći u sljedećim izvorima:

- [1] D. Halliday, R. Resnick, J.Walker: Fundamentals of Physics, 6th Ed., John Wiley & Sons, New York, 2002. (može i bilo koje drugo izdanje)
- [2] E. Babić, R. Krsnik, M. Očko: Zbirka riješenih zadataka iz fizike, 6. izd., Školska knjiga, Zagreb, 2004.
- [3] H. D.Young, R. A. Freedman, F.W. Sears, M.W. Zemansky,: University Physics, bilo koje izdanje.
- [4] I.E. Irodov: Problems in general physics, translated from the Russian by Yuri Atanov, Mir Publishers, Moscow, 1981.